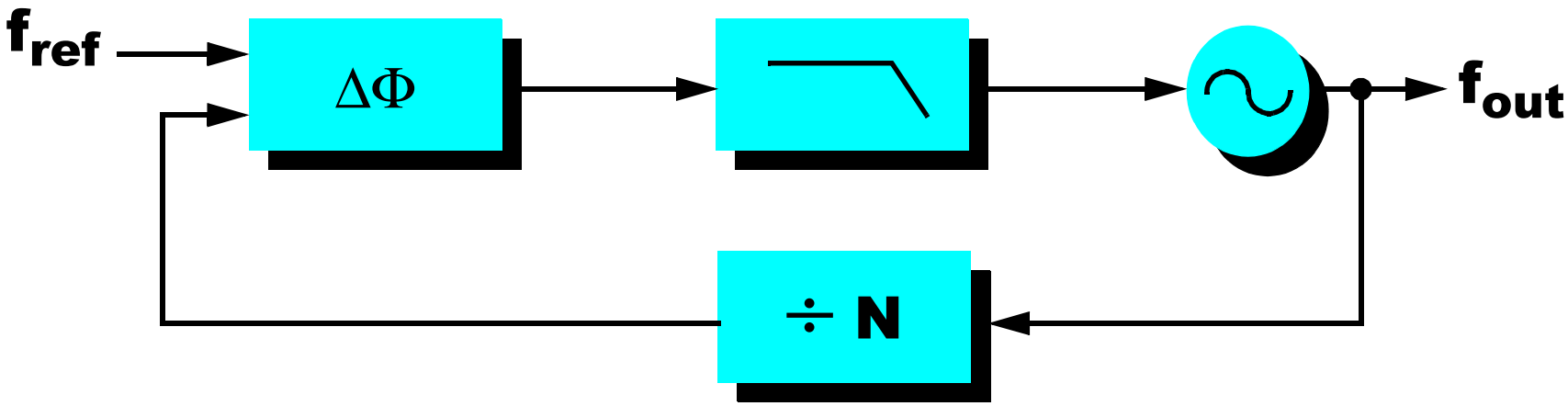
Phase Locked Loop
(boucle à verrouillage de phase)



1 - Principe

2 - Principaux comparateurs de phase

3 - Différents types

- 3-1: PLL du 2nd ordre - type 1
- 3-2: PLL avec pompe de charge - 3ème et 4ème ordre

4 - Comportement vis-à-vis du bruit

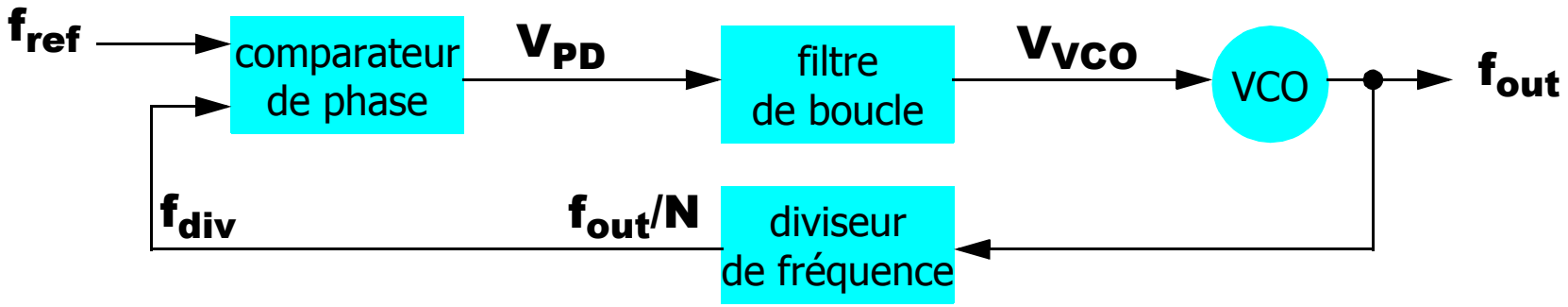
5 - Architectures

- 5-1: division entière (Integer-N PLL)
  - 5-1-1 prédiviseur fixe
  - 5-1-2 prédiviseur double module
- 5-2: division fractionnelle (Fractional-N PLL)

1 - PRINCIPE

Dans les systèmes RadioFréquences, le VCO est toujours inséré dans une boucle à verrouillage de phase afin de pouvoir

- modifier et contrôler la fréquence d'oscillation,
- diminuer le bruit de phase du VCO.



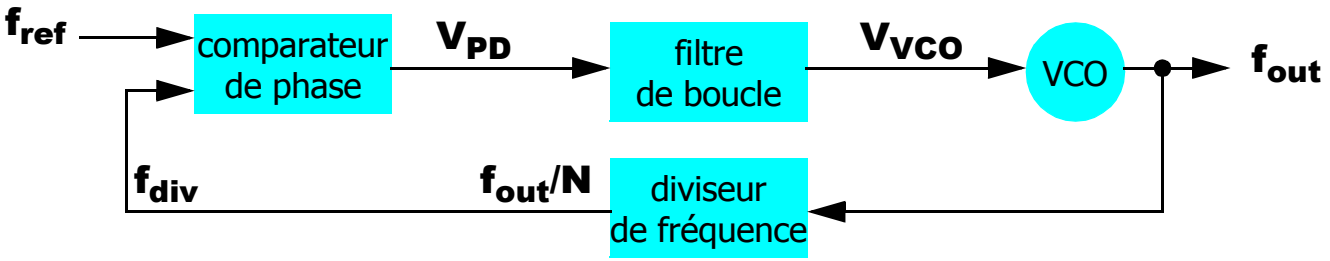
comparateur de phase (Phase Detector): génère un signal (tension ou courant) dont la composante continue est proportionnelle à $\Delta\phi$.

$$\overline{V_{PD}} = K_{PD} \times (\phi_{ref} - \phi_{div})$$

filtre de boucle (filtre passe-bas): extrait la composante continue du signal d'entrée.

diviseur de fréquence: fournit un signal de fréquence N fois plus faible qu'en entrée (N programmable).

Rappel: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\phi}{dt}$



principe du verrouillage de la PLL:

- $f_{ref} > f_{div} \Rightarrow \frac{d\phi_{ref}}{dt} > \frac{d\phi_{div}}{dt} \Rightarrow \frac{d(\phi_{ref} - \phi_{div})}{dt} > 0$

  $\Rightarrow \overline{V_{PD}} = K_{PD} \times (\phi_{ref} - \phi_{div})$ croît en fonction du temps

  $\Rightarrow V_{VCO}$ croît (en supposant le filtre non inverseur)

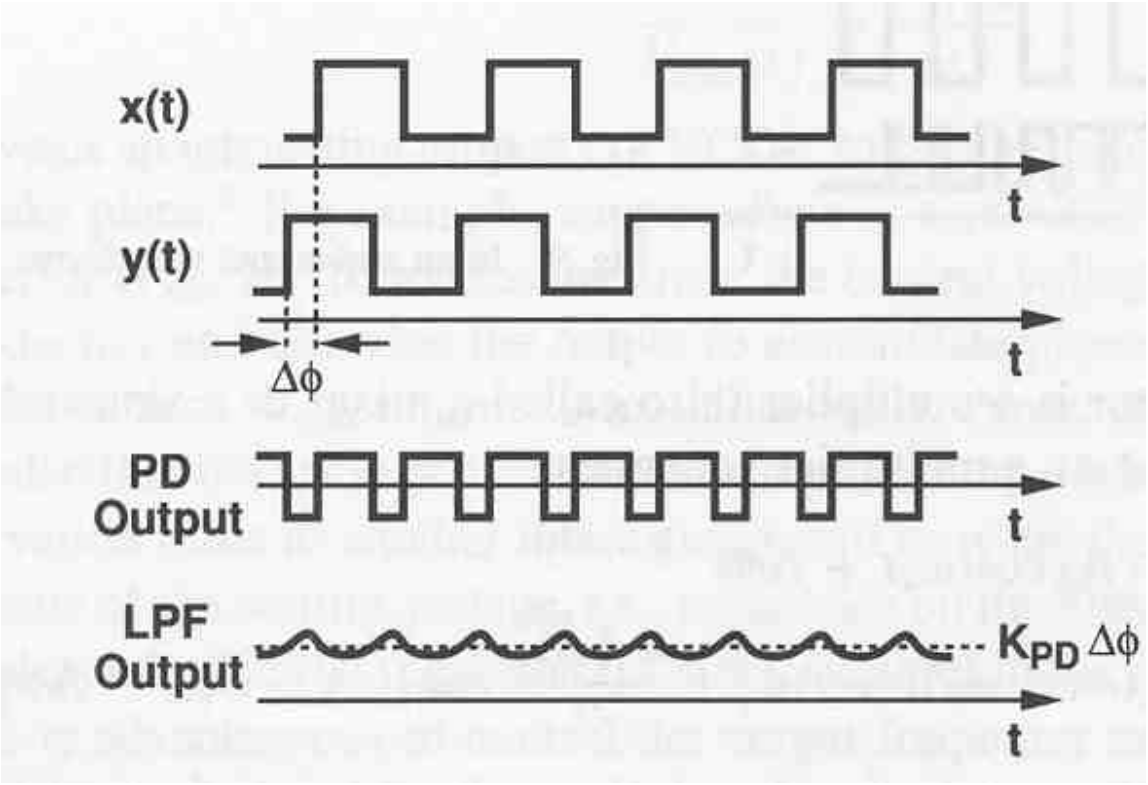
  $\Rightarrow f_{out}$ et donc f_{div} augmentent

- $f_{ref} = f_{div} \Rightarrow \frac{d(\phi_{ref} - \phi_{div})}{dt} = 0$

  $\Rightarrow \overline{V_{PD}}$, V_{VCO}, f_{out} constants (PLL verrouillée) $\Rightarrow$ **$f_{out} = N \times f_{ref}$**

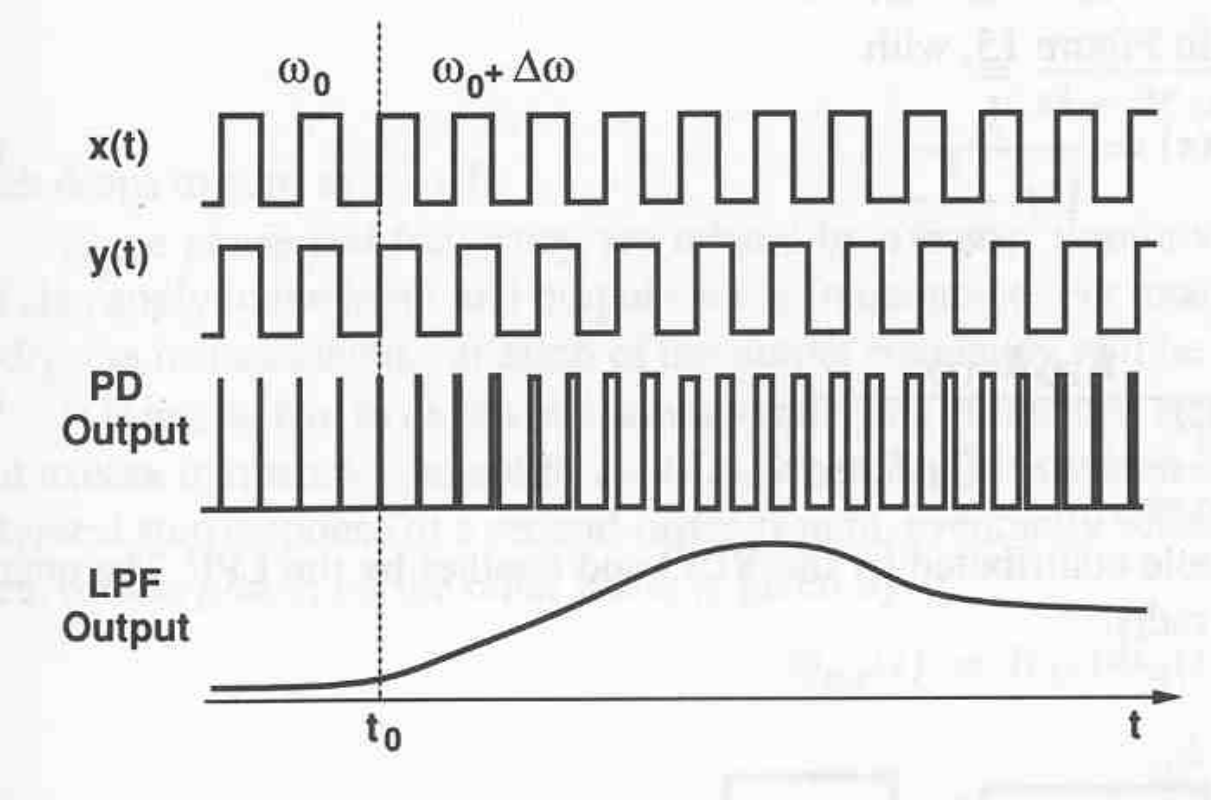
Remarques:

- après le verrouillage, les signaux à l'entrée du comparateur de phase sont à la **même fréquence** (*écart de phase constant*), mais **pas forcément en phase**

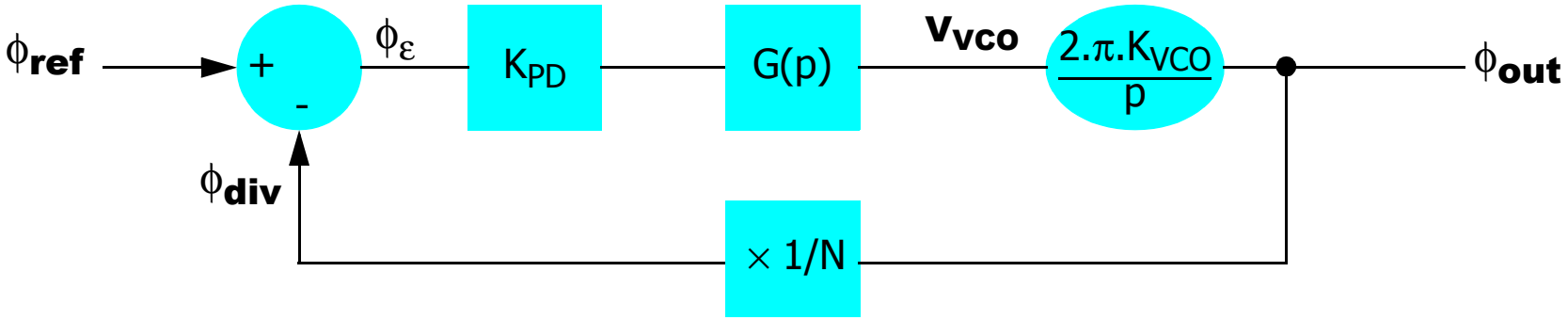


(Δϕ s'ajuste de façon à présenter à l'entrée du VCO la tension adéquate. Δϕ dépend du comparateur de phase et du filtre de boucle utilisés.)

- PLL = **système contre-réactionné**
  $\Rightarrow$ étude dynamique nécessaire pour vérifier - la stabilité
  - le comportement transitoire



Analyse de la PLL en considérant la phase comme variable d'état



fonction de transfert du VCO:

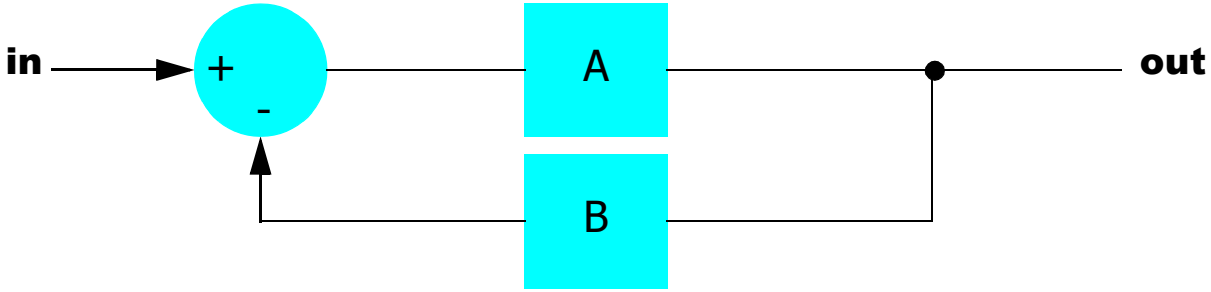
$$f_{out} = K_{VCO} \times V_{VCO} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\phi_{out}}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \phi_{out} = \int_0^t (2\pi \times K_{VCO} \times V_{VCO}) dt$$

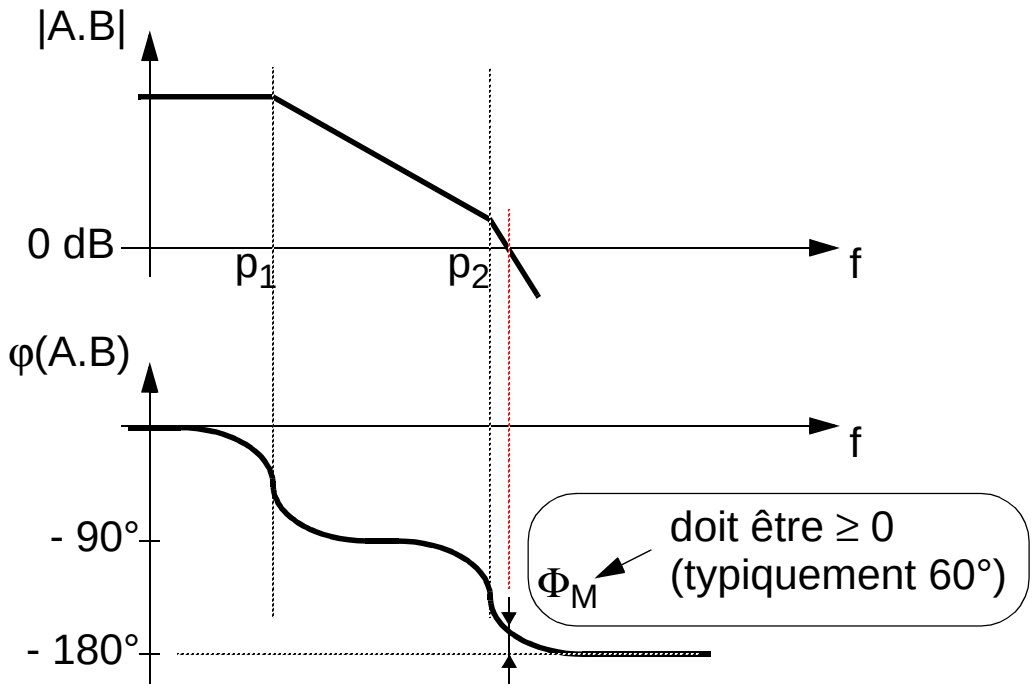
$$\phi_{out}(p) = \frac{2\pi \cdot K_{VCO}}{p} \cdot V_{VCO}$$

gain de boucle: $\boxed{\frac{\phi_{div}}{\phi_{ref}} = K_{PD} \times G(p) \times \frac{2\pi \cdot K_{VCO}}{p} \times \frac{1}{N}}$ $\Rightarrow$ au moins un pôle à l'origine (dû au VCO)

Rappel: condition de stabilité d'un système contre-réactionné

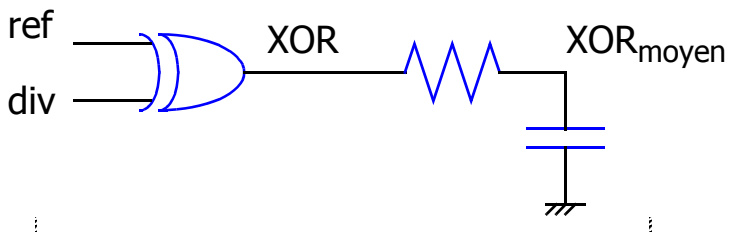


étude du gain de boucle A × B:

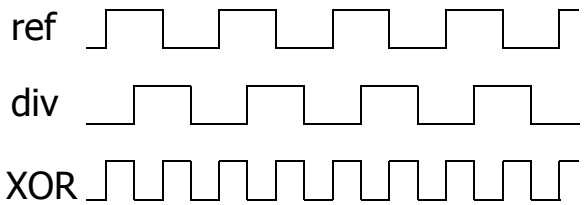


2 - PRINCIPAUX COMPARATEURS DE PHASE

2-1 - Porte XOR

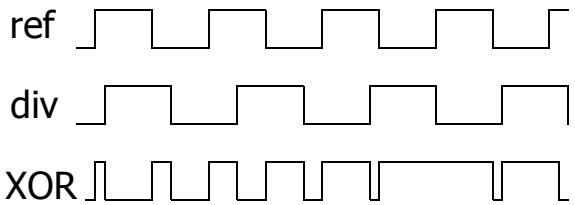


1er cas: $f_{div} = f_{ref}$



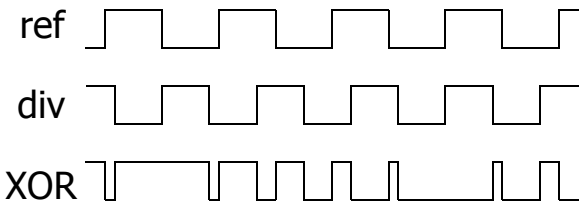
XOR_{moyen} = constante
$\Rightarrow f_{out}$ = constante

2ème cas: $f_{div} < f_{ref}$

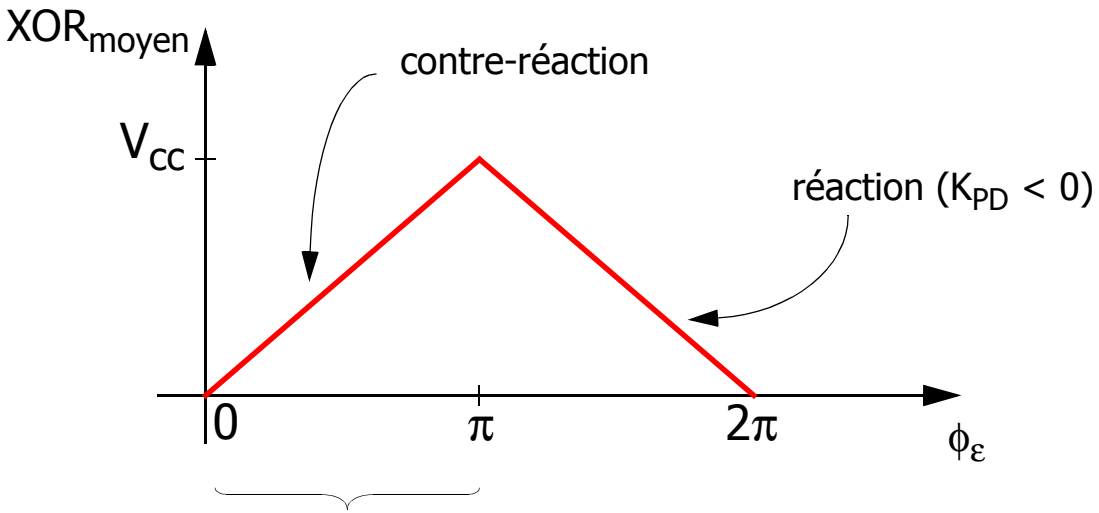


XOR_{moyen} augmente
$\Rightarrow f_{out}$ et donc f_{div} augmentent

3ème cas: $f_{div} > f_{ref}$



XOR_{moyen} diminue
$\Rightarrow f_{out}$ et donc f_{div} diminuent



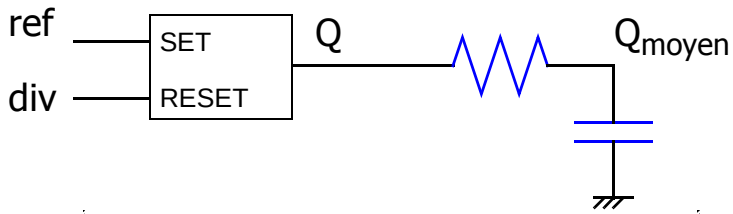
$$K_{PD} = \frac{V_{cc}}{\pi}$$

la PLL se verrouille dans cette zone

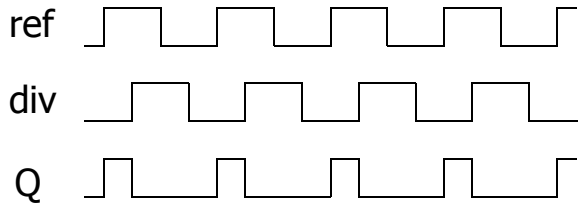
- composante en sortie à $2 \times f_{ref}$: doit être supprimée par le filtre de boucle
- sensible au rapport cyclique des signaux
- K_{PD} fonction de V_{cc}
- si f_{ref} et f_{div} sont très différents, tension moyenne en sortie $\approx V_{cc}/2$, sans indiquer le signe de $(f_{ref}-f_{div})$

  $\Rightarrow$ comparateur de <u>phase</u> et non de <u>fréquence</u>

2-2 - Bascule Set - Reset

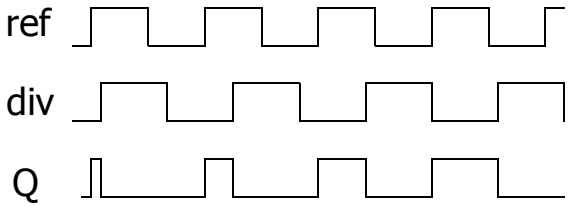


1er cas: $f_{div} = f_{ref}$



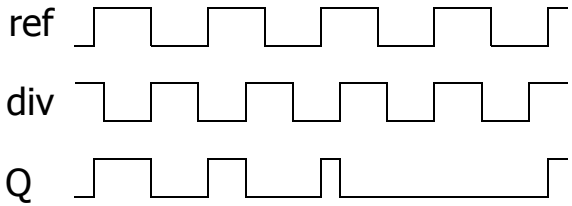
Q_{moyen} = constante
$\Rightarrow f_{out}$ = constante

2ème cas: $f_{div} < f_{ref}$

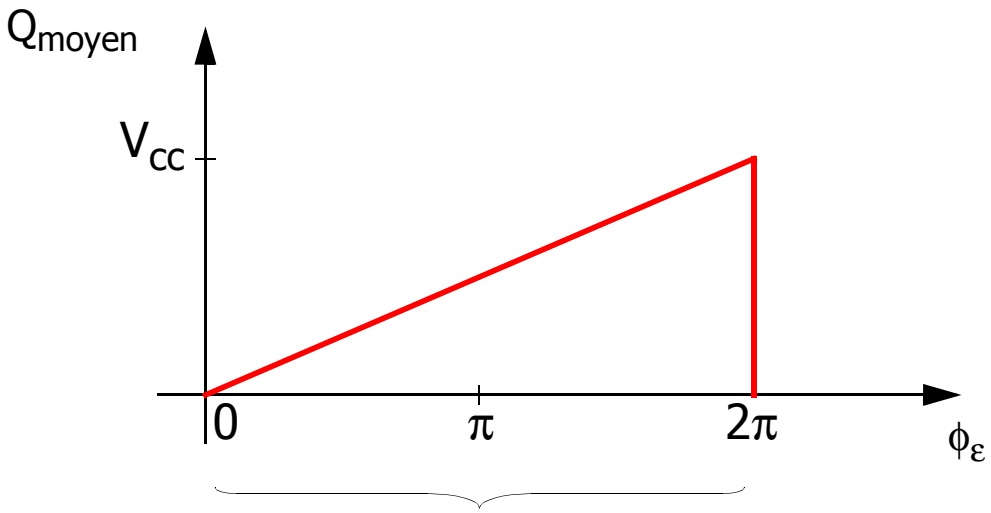


Q_{moyen} augmente
$\Rightarrow f_{out}$ et donc f_{div} augmentent

3ème cas: $f_{div} > f_{ref}$



Q_{moyen} diminue
$\Rightarrow f_{out}$ et donc f_{div} diminuent

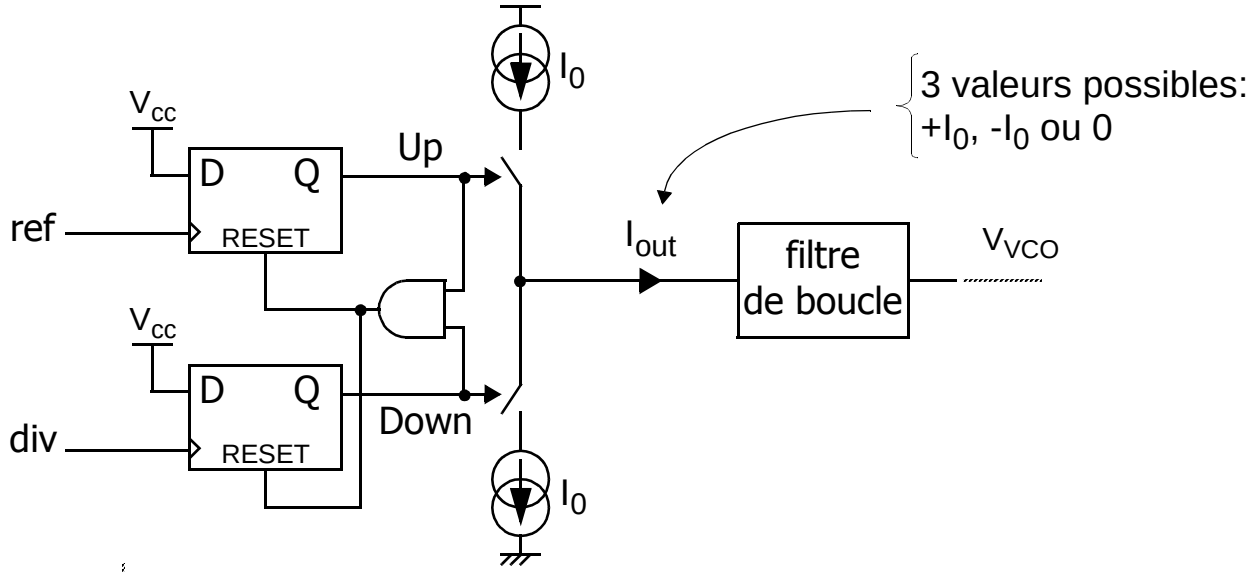


la PLL se verrouille dans cette zone

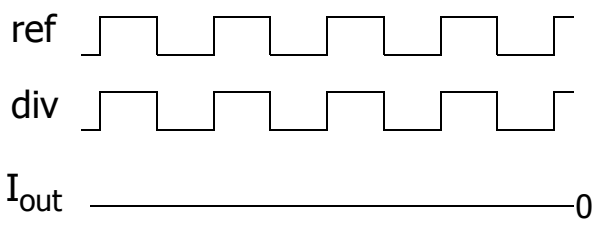
$$K_{PD} = \frac{V_{cc}}{2\pi}$$

- composante en sortie à f_{ref}: doit être supprimée par le filtre de boucle
- insensible au rapport cyclique des signaux (fonctionne sur fronts)
- K_{PD} fonction de V_{cc}

2-3 - PFD (Phase Frequency Detector) - Charge Pump



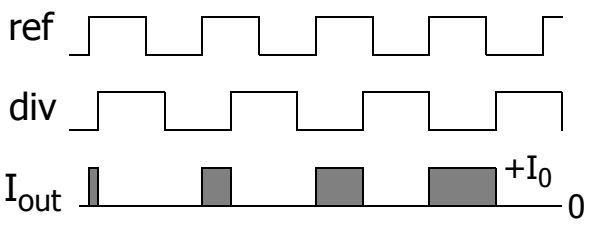
1er cas: $f_{div} = f_{ref}$



$I_{out\ moyen} = 0$

$\Rightarrow V_{VCO}$ et f_{out} = constantes

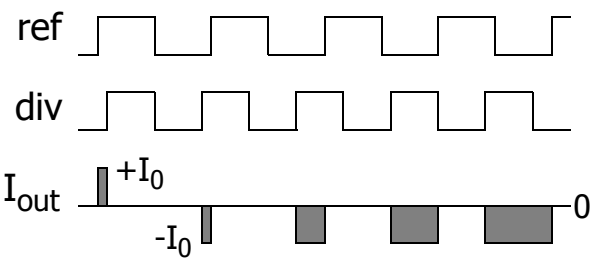
2ème cas: $f_{div} < f_{ref}$



$I_{out\ moyen} > 0$

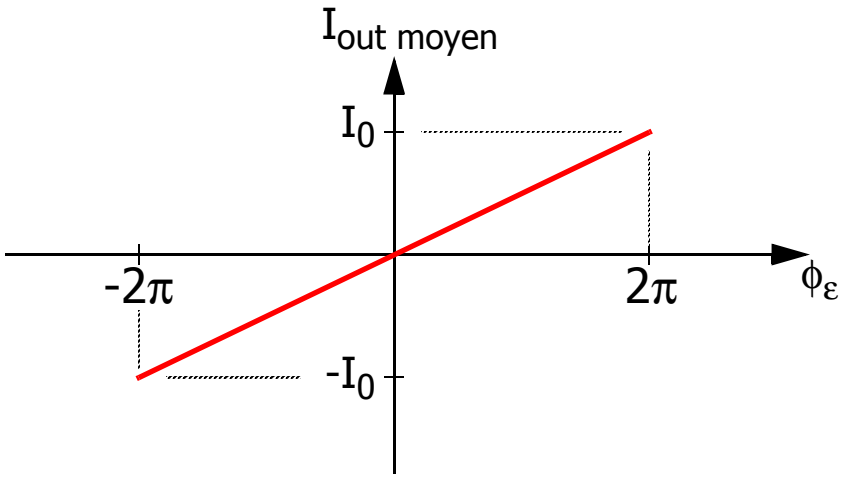
$\Rightarrow V_{VCO}$ et f_{out} augmentent

3ème cas: $f_{div} > f_{ref}$



$I_{out\ moyen} < 0$

$\Rightarrow V_{VCO}$ et f_{out} diminuent



$$K_{PD} = \frac{I_0}{2\pi}$$

- après verrouillage, les entrées du comparateur ont la même fréquence et la même phase
- insensible au rapport cyclique des signaux (fonctionne sur fronts)
- détection de phase et de fréquence (verrouillage même si f_{ref} et f_{div} sont initialement éloignées)

3 - DIFFÉRENTS TYPES

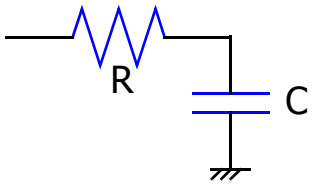
Le comportement dynamique de la PLL dépend du type (de l'ordre) du filtre de boucle

3-1 - PLL du 2nd ordre - type 1

filtre de boucle d'ordre 1

$$G(p) = \frac{K_{LPF}}{1 + \frac{p}{\omega_{LPF}}}$$

exemple:



$$K_{LPF} = 1$$

$$\omega_{LPF} = \frac{1}{RC}$$

doit être inférieure à ω_{ref} (ou $2.\omega_{ref}$)

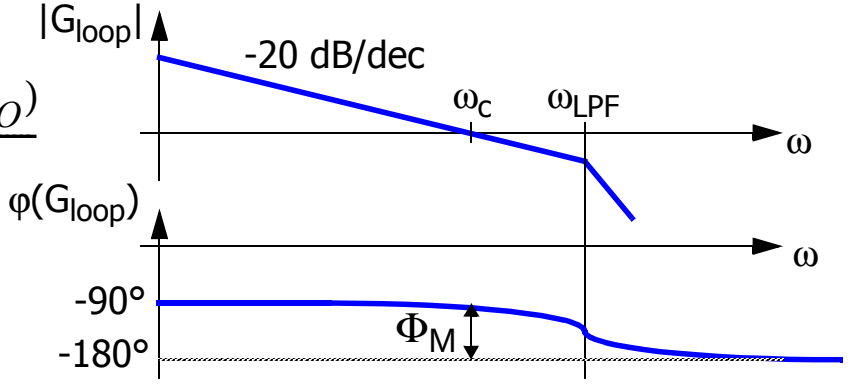
Gain de boucle:

$$G_{loop} = K_{PD} \times K_{LPF} \times (2 \cdot \pi \cdot K_{VCO}) \times \frac{1}{N} \times \frac{1}{p} \times \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_{LPF}}}$$

notation:

pulsation de coupure: $\omega_c = \frac{K_{PD} \times K_{LPF} \times (2 \cdot \pi \cdot K_{VCO})}{N}$

$$G_{loop} = \omega_c \times \frac{1}{p} \times \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_{LPF}}}$$



- 2 pôles $\Rightarrow$ PLL du 2nd ordre
- 1 pôle en 0 $\Rightarrow$ type 1
- écart relatif ω_c - ω_{LPF} fixe la marge de phase

  ω_c fixé par les éléments de la PLL

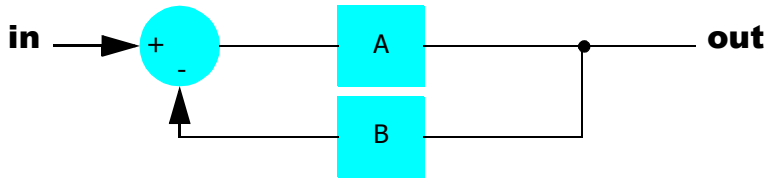
  ω_{LPF} à placer «au bon endroit»

  remarque:

  ω_{LPF} augmente $\Rightarrow$ marge de phase augmente (stabilité augmente)

  mais filtrage de V_{VCO} moins bon

Gain en boucle fermée:



$$\frac{out}{in} = \frac{A}{1 + (A \cdot B)}$$

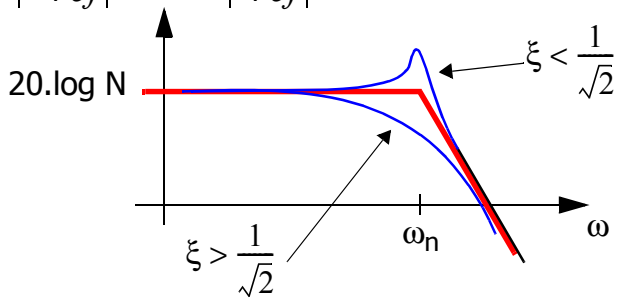
$$\frac{\phi_{out}}{\phi_{ref}} = \frac{\omega_{LPF} \cdot \omega_c \cdot N}{\omega_{LPF} \cdot \omega_c + \omega_{LPF} \cdot p + p^2}$$

notation usuelle d'un système du second ordre : $\frac{\phi_{out}}{\phi_{ref}} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + (2 \cdot \xi \cdot \omega_n) \cdot p + p^2} \times N$

- pulsation naturelle : $\omega_n = \sqrt{\omega_{LPF} \cdot \omega_c}$ *(équation a)*
- coefficient d'amortissement : $\xi = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\omega_{LPF}}{\omega_c}}$ *(équation b)*

rappel: $\omega_c = \frac{K_{PD} \times K_{LPF} \times (2 \cdot \pi \cdot K_{VCO})}{N}$

$\left|\frac{\phi_{out}}{\phi_{ref}}\right|$ ou $\left|\frac{f_{out}}{f_{ref}}\right|$



Dimensionnement de la PLL:

Données de départ: K_{PD}, K_{LPF}, K_{VCO}, N

$\Rightarrow$ ω_c fixé

$\Rightarrow$ ω_{LPF} à déterminer

1ère possibilité: fixer le cœfficient d'amortissement ξ (optimum: $\frac{1}{\sqrt{2}}$)

équation b $\Rightarrow$ $\omega_{LPF} = \omega_c \cdot (2\xi)^2$ fixé (optimum: $2 \cdot \omega_c$)

équation a $\Rightarrow$ $\omega_n = \sqrt{\omega_{LPF} \cdot \omega_c}$ fixé (optimum: $\sqrt{2} \cdot \omega_c$)

2ème possibilité: fixer ω_{LPF} en fonction de ω_{ref} (optimum: $\frac{\omega_{ref}}{10}$ pour filtrer suffisamment V_{VCO})

Tendance générale :

ω_{ref} faible $\Rightarrow$ ω_{LPF} faible

- ω_n faible (*équation a*) $\Rightarrow$ système lent
- ξ faible (*équation b*) $\Rightarrow$ stabilité dégradée

ω_{ref} faible

$\Downarrow$

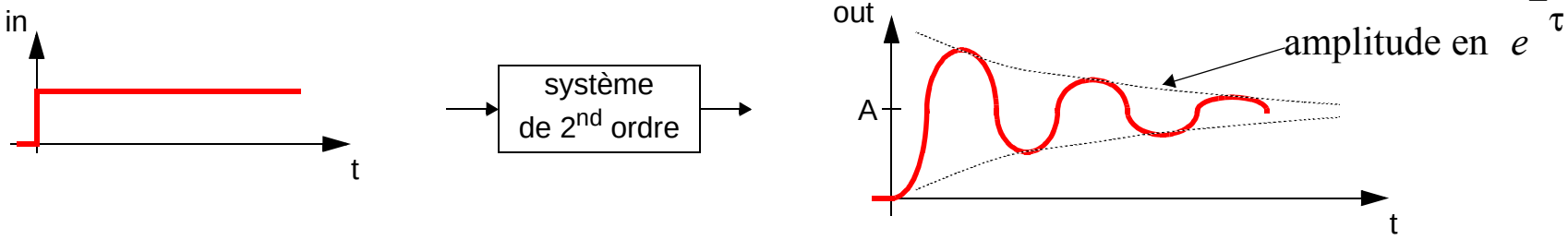
cas défavorable

Inconvénient de la PLL d'ordre 2: impossible de fixer indépendamment le cœfficient d'amortissement et la bande passante (**un seul degré de liberté: ω_{LPF}**)

Comportement transitoire d'un système du second ordre

(utile pour connaître le temps d'établissement de la PLL)

réponse d'un système du second ordre à un échelon (pour $\xi < 1$)



$$out(t) = A \times \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \frac{\cos\left(\left(\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}\right)t + \varphi\right)}{\cos\varphi} \right]$$

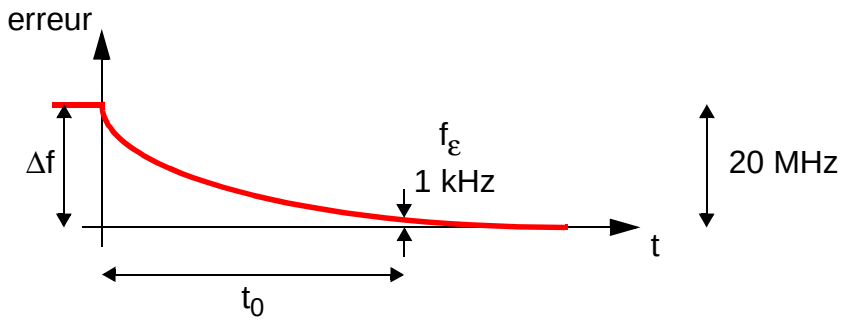
avec

$$\begin{cases} \tau = \dfrac{1}{\xi \cdot \omega_n} \\ \tan\varphi = \dfrac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \end{cases}$$

Calcul du temps d'établissement pour une précision finale donnée

exemple: changement de fréquence $\Delta f = 20$ MHz

précision finale voulue $f_\varepsilon = 1$ kHz

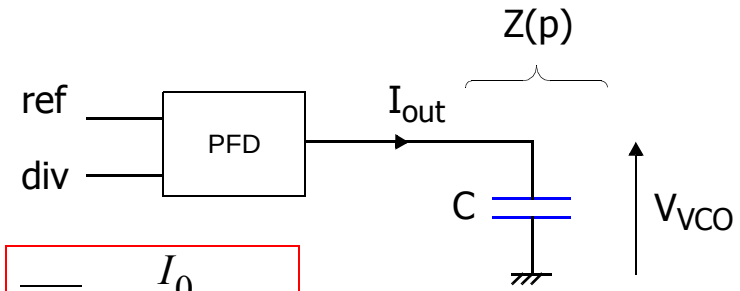


$$erreur = \Delta f \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$$

$$\Rightarrow \quad f_\varepsilon = \Delta f \cdot e^{\frac{-t_0}{\tau}}$$

$$\Rightarrow \quad t_0 = \tau \cdot Ln(\frac{\Delta f}{f_\varepsilon})$$

3-2 - PLL avec pompe de charge (3ème et 4ème ordre)



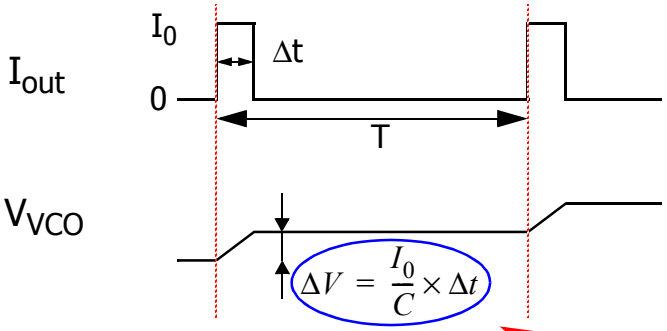
$$\overline{I_{out}} = \frac{I_0}{2\pi} \times \phi_\varepsilon$$

courant intégré dans une capacité
pour obtenir la tension de contrôle du VCO

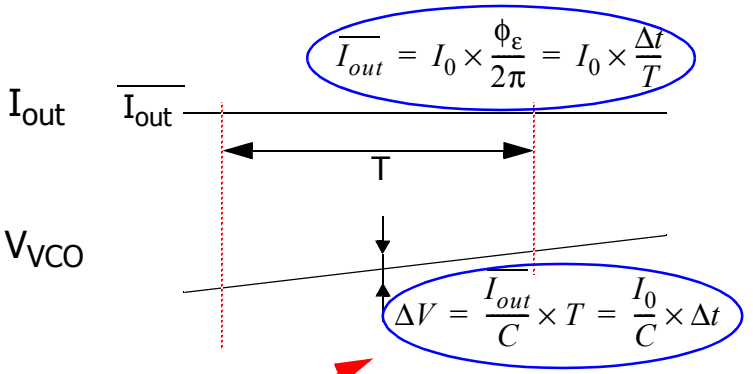
(tant que $f_{div} \neq f_{ref}$, $\overline{I_{out}} \neq 0$
$\Rightarrow$ V_{VCO} et donc f_{out} varient)

verrouillage lorsque $f_{div} = f_{ref}$ et $\phi_{div} = \phi_{ref}$

analyse exacte



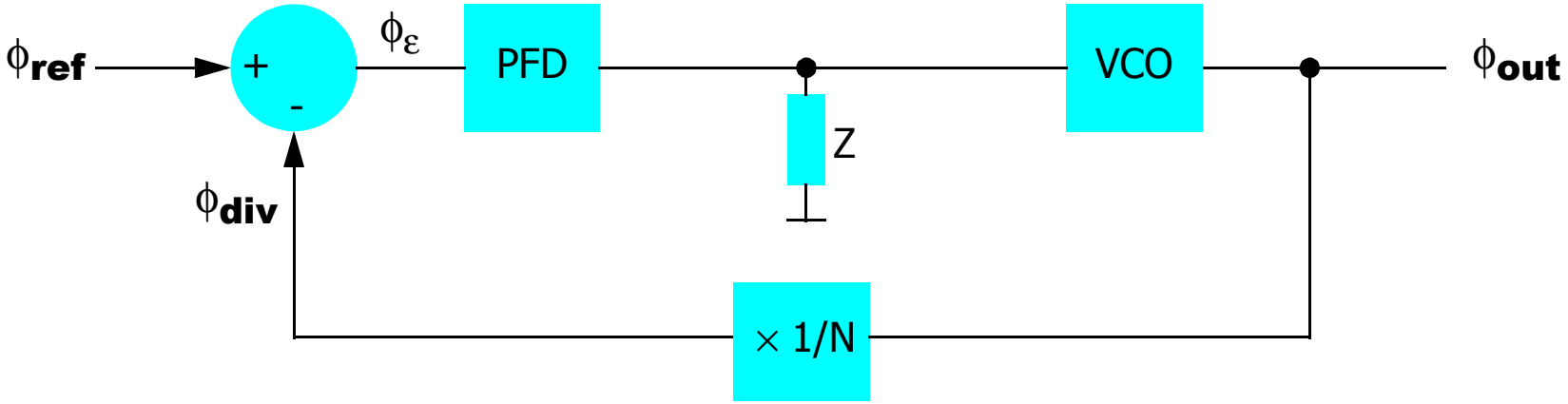
analyse moyenne



résultats identiques

Si la bande passante de la boucle est faible par rapport à la fréquence d'entrée (typ. 1/10), on peut considérer le fonctionnement **moyen** sur plusieurs cycles de fonctionnement.

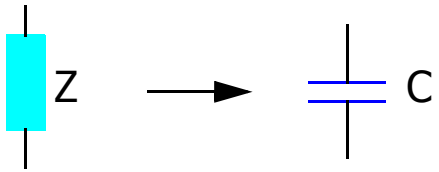
Gain de boucle de la PLL:



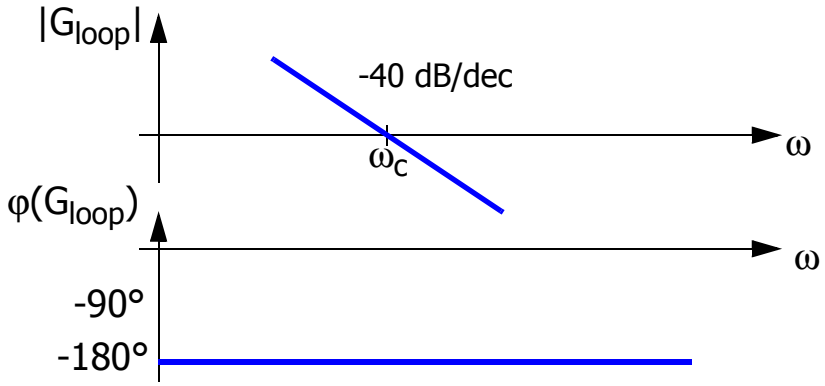
$$G_{loop} = \frac{I_0}{2\pi} \times Z(p) \times \frac{2\pi \cdot K_{VCO}}{p} \times \frac{1}{N}$$

dépend du filtre utilisé

1ère possibilité:



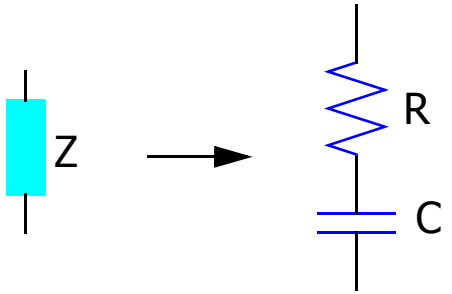
$$Z(p) = \frac{1}{Cp}$$



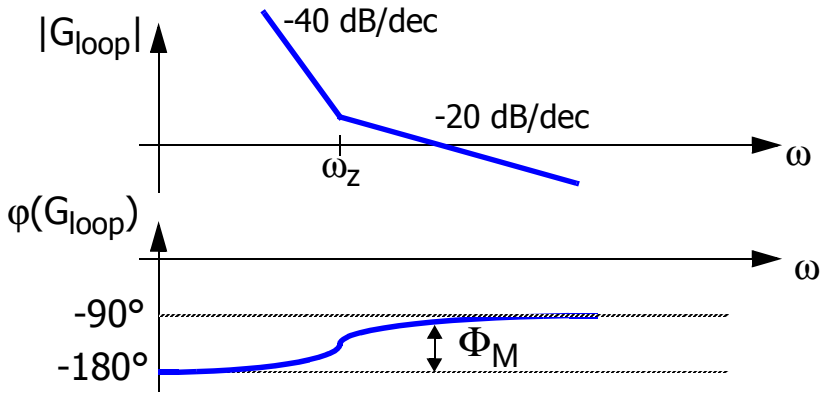
⇒ instable

⇒ nécessaire d'ajouter un zéro pour stabiliser la boucle

2ème possibilité:



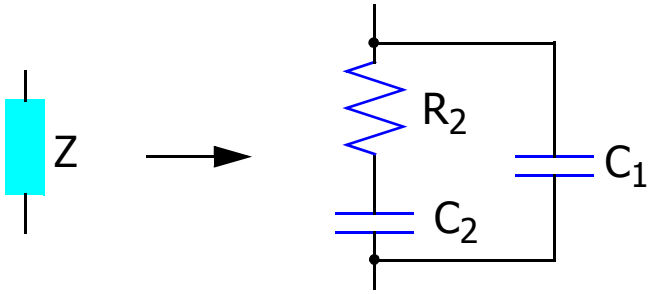
$$Z(p) = R + \frac{1}{Cp} = \frac{1 + \frac{p}{\omega_z}}{Cp} \qquad \left(\text{avec } \omega_z = \frac{1}{RC}\right)$$



⇒ 2 pôles (tous les 2 à l'origine) + 1 zéro

⇒ PLL du 2nd ordre, de type 2

3ème possibilité: ajout d'un pôle supplémentaire pour avoir un meilleur filtrage (meilleure réjection de f_{ref} à l'entrée du VCO)

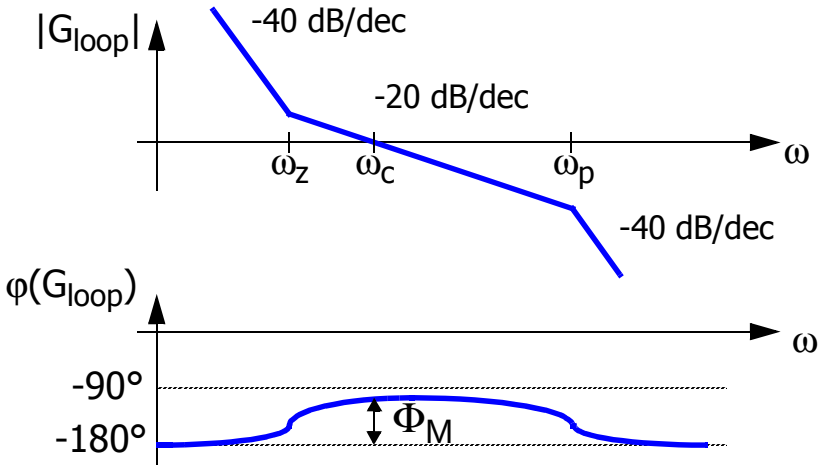


$$Z(p) = \frac{1}{C_{eq}\,p} \times \frac{1+\frac{p}{\omega_z}}{1+\frac{p}{\omega_p}}$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

$$\omega_z = \frac{1}{R_2\,C_2}$$

$$\omega_p = \frac{1}{R_2 \times \left(\frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}\right)}$$



⇒ 3 pôles (dont 2 à l'origine) + 1 zéro

⇒ PLL du 3ème ordre, de type 2

dimensionnement du filtre de boucle:

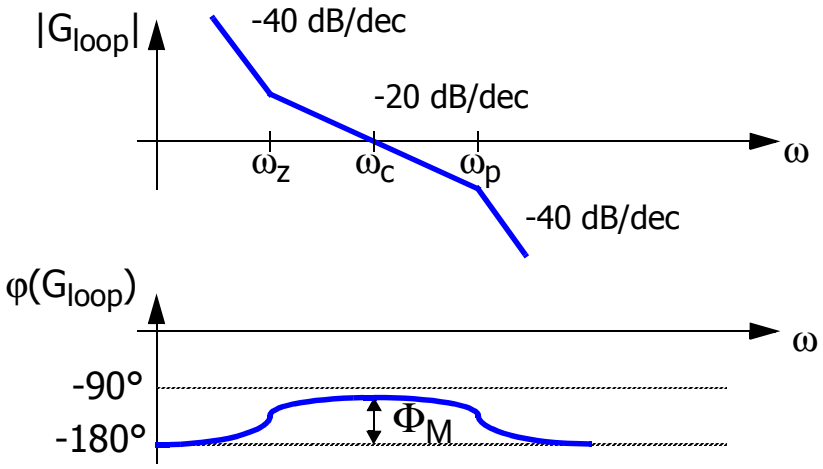
$$G_{loop} = \left(\frac{I_0}{2\pi}\right) \times \left(\frac{1}{C_{eq}\, p}\right) \times \frac{\left(1 + \frac{p}{\omega_z}\right)}{\left(1 + \frac{p}{\omega_p}\right)} \times \left(\frac{2\pi \cdot K_{VCO}}{p}\right) \times \left(\frac{1}{N}\right)$$

$$= \left(\frac{-I_0}{2\pi}\right) \times \left(\frac{1}{C_{eq}\, \omega^2}\right) \times \frac{\left(1 + \frac{p}{\omega_z}\right)}{\left(1 + \frac{p}{\omega_p}\right)} \times (2\pi \cdot K_{VCO}) \times \left(\frac{1}{N}\right) \qquad \textbf{équation 1}$$

$$\varphi(G_{loop}) = 180° + \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_z}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right) \qquad \textbf{équation 2}$$

Pour assurer la stabilité de la boucle, on s'arrange pour que l'inflexion de phase ait lieu lorsque $\omega = \omega_c$ (phase maximale lorsque $|G_{loop}|=1$)

$$\left(\frac{d\varphi}{d\omega} = \left(\frac{\frac{1}{\omega_z}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2}\right) - \left(\frac{\frac{1}{\omega_p}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}\right) = 0 \text{ pour } \omega = \omega_c\right) \Rightarrow \omega_c = \sqrt{\omega_z \cdot \omega_p}$$



Ayant fixé ω_c et ϕ_M voulus, on déduit les valeurs nécessaires pour ω_z et ω_p:

$$\begin{cases} \omega_p = \dfrac{\omega_c}{\dfrac{1}{\cos\phi_M} - \tan\phi_M} \\ \omega_z = \dfrac{\omega_c^{\,2}}{\omega_p} \end{cases}$$

pour $\phi_M = 60°$: $\begin{cases} \omega_p = \omega_c \times 3,73 \\ \omega_z = \omega_c \times 0,268 \end{cases}$

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{\omega_z}{\omega_p} \times \dfrac{I_0 \cdot 2\pi \cdot K_{VCO}}{\omega_c^{\,2} \cdot N} \times \dfrac{\sqrt{1+(\omega_c/\omega_z)^2}}{\sqrt{1+(\omega_c/\omega_p)^2}} \\ C_2 = C_1 \times \left(\dfrac{\omega_p}{\omega_z} - 1 \right) \\ R_2 = \dfrac{1}{C_2 \cdot \omega_z} \end{cases}$$

(équation 1)

Résumé de la démarche:

- fixer ω_c et ϕ_M (typiquement $\omega_{ref}/10$ et 60°)
- en déduire ω_p et ω_z
- en déduire C_1, C_2 et R_2

Choix de ω_c = compromis

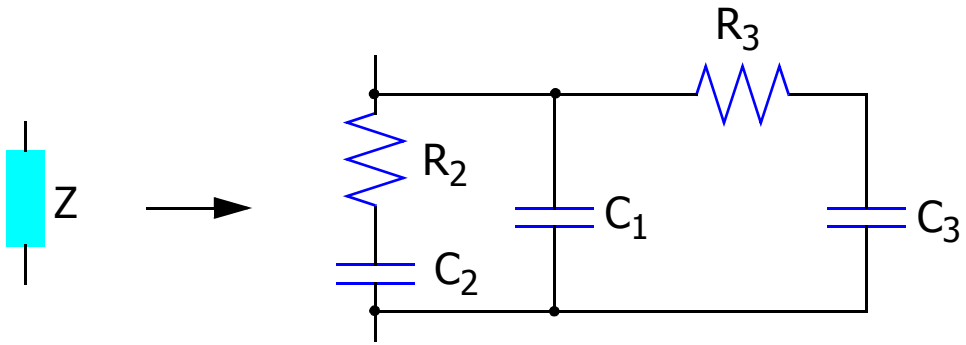
ω_c ↗ $\Rightarrow$

- boucle + rapide (+)
- moins bon filtrage de la composante à f_{ref} en entrée du VCO (-)

Dans la pratique, ω_c doit rester inférieure à $\omega_{ref}/10$.

Pour améliorer le filtrage, on peut ajouter des pôles supplémentaires (mais verrouillage + long, et attention à la stabilité):

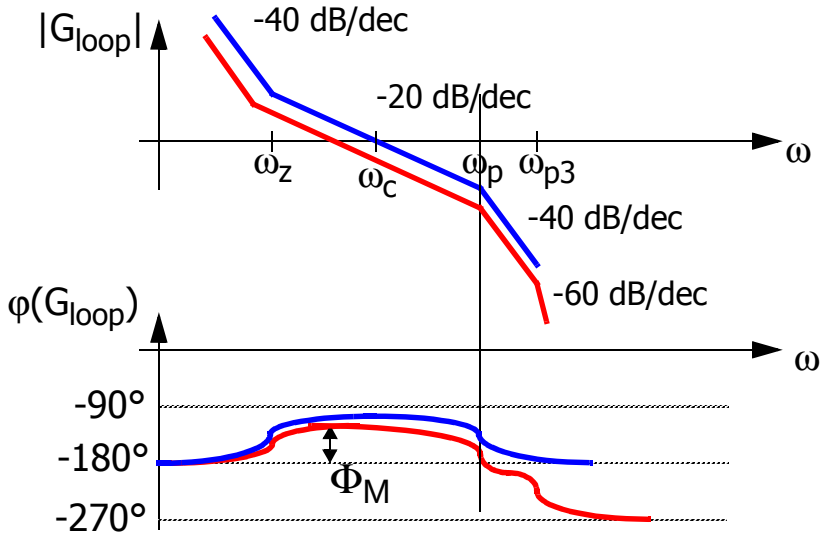
4ème possibilité:



nouveau pôle introduit à $\omega_{p3} = \dfrac{1}{R_3 \cdot C_3}$

ω_{p3} doit être • inférieure à ω_{ref}, pour filtrer suffisamment les raies parasites
• supérieure à ω_c (typiquement 5 $\times$) pour ne pas compromettre la stabilité

pôle supplémentaire $\Rightarrow \phi_M$ diminue
$\Rightarrow$ pour compenser on prend ω_c plus faible que dans le cas précédent
$\Rightarrow$ temps de commutation plus long

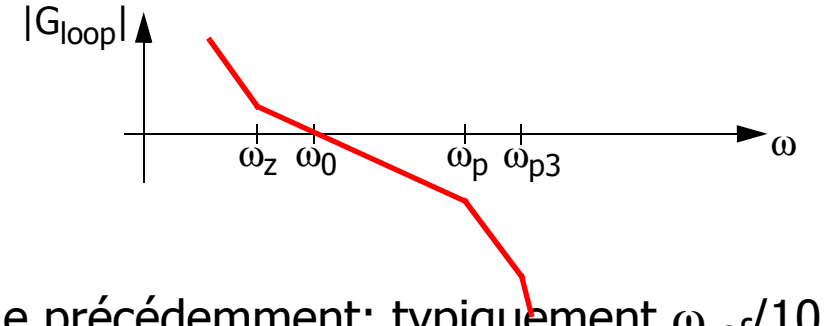


PLL du 4ème ordre, de type 2

4 pôles

2 pôles à l'origine

démarche:



- fixer ω_c et ϕ_M (comme précédemment: typiquement $\omega_{ref}/10$ et 60°)
- $$\omega_p = \frac{\omega_c}{\frac{1}{\cos\phi_M} - \tan\phi_M}$$ (comme précédemment)
- fixer ω_{p3} légèrement en dessous de ω_{ref} ($\omega_{ref}/3$ par exemple)
- nouvelle fréquence de coupure (légèrement inférieure à ω_c)

$$\omega_0 = \frac{\tan\phi_M \cdot (\omega_p^{-1} + \omega_{p3}^{-1})}{(\omega_p^{-1} + \omega_{p3}^{-1})^2 + (\omega_p^{-1} \cdot \omega_{p3}^{-1})} \times \left[\sqrt{1 + \frac{(\omega_p^{-1} + \omega_{p3}^{-1})^2 + (\omega_p^{-1} \cdot \omega_{p3}^{-1})}{[\tan\phi_M \cdot (\omega_p^{-1} + \omega_{p3}^{-1})]^2}} - 1 \right]$$

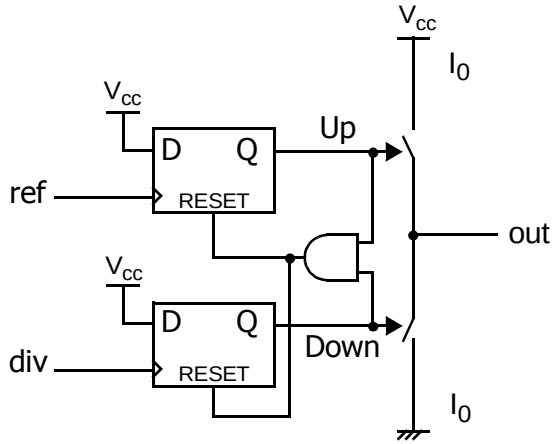
- $$\omega_z = \omega_0^2 \times \left(\frac{1}{\omega_p} + \frac{1}{\omega_{p3}} \right)$$

- $C_1 = \frac{\omega_z}{\omega_p} \times \frac{I_0 \cdot 2\pi \cdot K_{VCO}}{\omega_0^{\,2} \cdot N} \times \frac{\sqrt{1 + (\omega_c / \omega_z)^2}}{\sqrt{(1 + (\omega_c / \omega_p)^2) \cdot (1 + (\omega_c / \omega_{p3})^2)}}$
- $C_2 = C_1 \times \left(\frac{\omega_p}{\omega_z} - 1 \right)$
- $R_2 = \frac{1}{C_2 \cdot \omega_z}$
- $C_3 \leq \frac{C_1}{10}$
- $R_3 = \frac{1}{C_3 \cdot \omega_{p3}}$

Remarque:

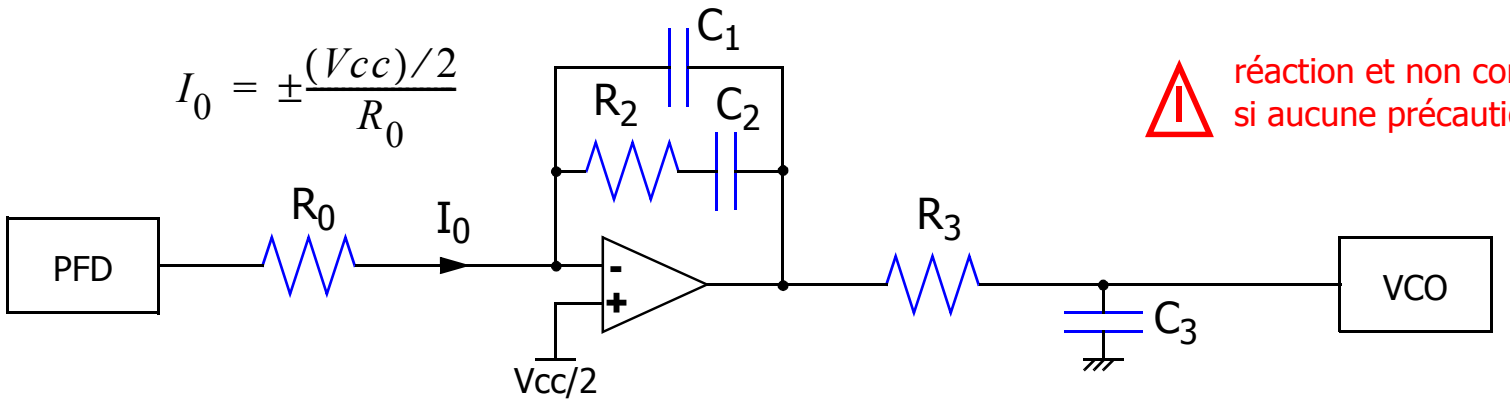
Comparateur de phase PFD considéré jusqu'ici: sortie = source de courant.

Dans certains cas, sortie = source de tension



On se ramène au cas précédent en modifiant légérement le filtre de boucle:

$$I_0 = \pm\frac{(Vcc)/2}{R_0}$$

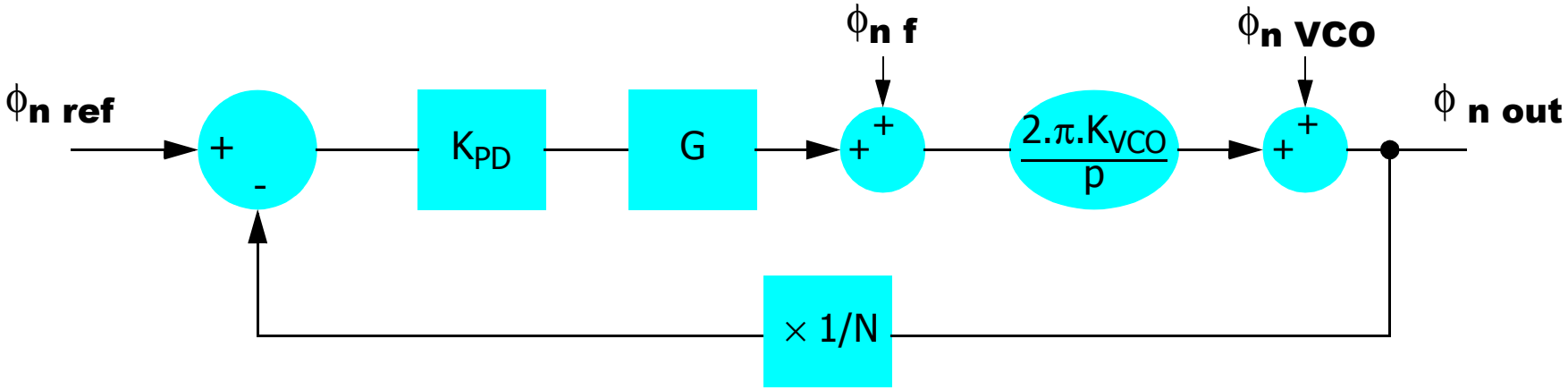


réaction et non contre-réaction
si aucune précaution n'est prise

4 - COMPORTEMENT VIS-À-VIS DU BRUIT

But de l'étude: déterminer comment les différentes sources de bruit affectent le spectre de sortie en fonction de la fréquence

PLL incluant les différentes sources de bruit (ici, bruit = bruit de phase)



$\phi_{n\ ref}$: bruit de phase de la référence de fréquence (quartz) (typ: -130 dBc/Hz @ 10Hz)

$\phi_{n\ f}$: bruit du filtre de boucle

$\phi_{n\ VCO}$: bruit de phase du VCO

bruit en sortie:

$$\phi_{n\ out} = \phi_{n\ VCO} + \frac{2\pi \cdot K_{VCO}}{p} \cdot \left\{ \phi_{n\ f} + (K_{PD} \cdot G) \cdot \left[\phi_{n\ ref} - \left(\frac{1}{N} \cdot \phi_{n\ out} \right) \right] \right\}$$

$$\phi_{n\ out} = \left(N \times \frac{G_{loop}}{1 + G_{loop}} \right) \cdot \phi_{n\ ref} + \left(\frac{2\pi \cdot K_{VCO}}{p} \times \frac{1}{1 + G_{loop}} \right) \cdot \phi_{n\ f} + \frac{1}{1 + G_{loop}} \cdot \phi_{n\ VCO}$$

avec $G_{loop} = K_{PD} \cdot G \cdot \frac{2\pi \cdot K_{VCO}}{p} \cdot \frac{1}{N}$

exemple: $G = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{LPF}}}$ (PLL d'ordre 2, type 1)

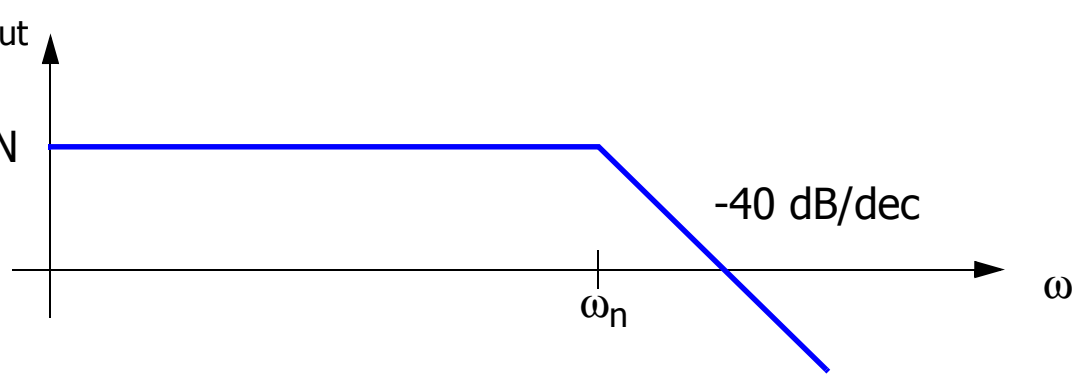
(tendance démontrée ici: identique pour les autres types de PLL)

$\frac{G_{loop}}{1 + G_{loop}}$ peut s'écrire sous la forme $\frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$ (passe bas)

$\frac{1}{1 + G_{loop}}$ peut s'écrire sous la forme $\frac{p^2 + 2\xi\omega_n p}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$ (passe haut)

bruit en sortie dû à la référence:

$$\left(N \times \frac{G_{loop}}{1+G_{loop}}\right) \cdot \phi_{n\ ref}$$

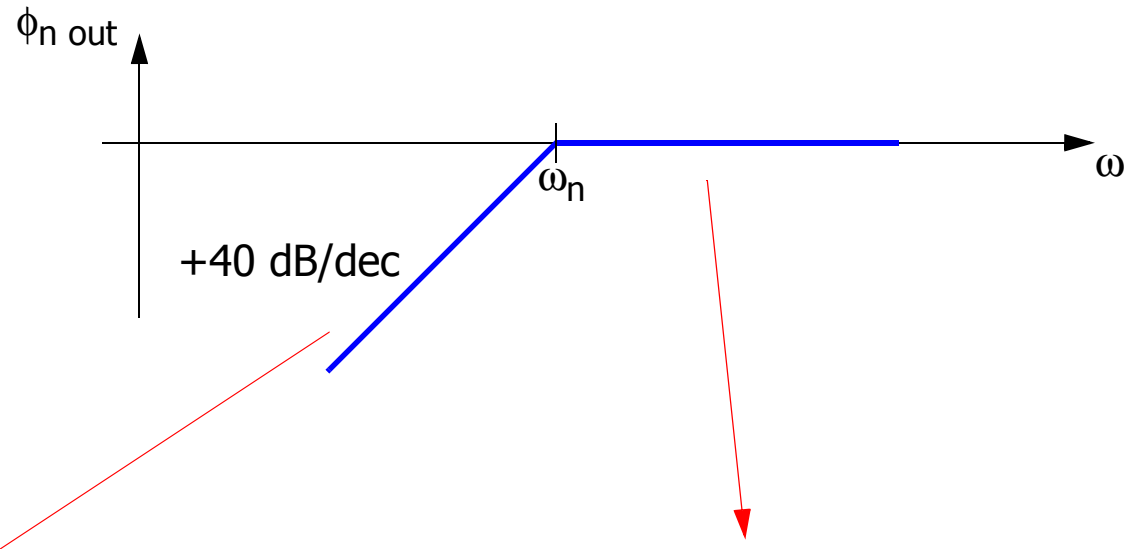


dans la bande passante de la PLL, le bruit de la référence se retrouve en sortie multiplié par N

le bruit de phase de la référence est filtré pour les fréquences supérieures à $\omega_n/2\pi$

bruit en sortie dû au VCO:

$$\left(\frac{1}{1+G_{loop}}\right)\cdot\phi_{n\ VCO}$$

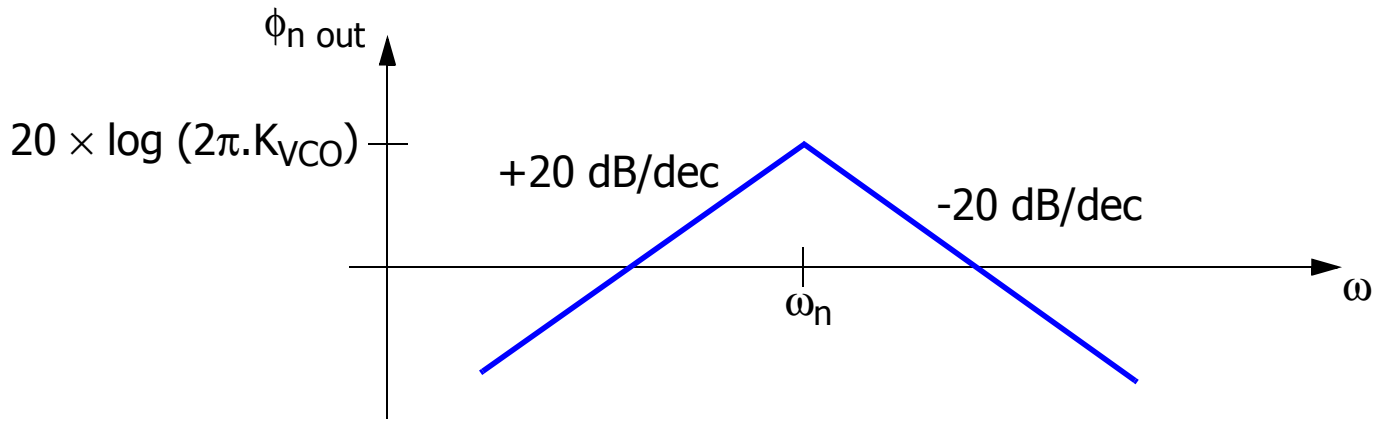


dans la bande passante de la PLL,
le bruit de phase du VCO
est filtré

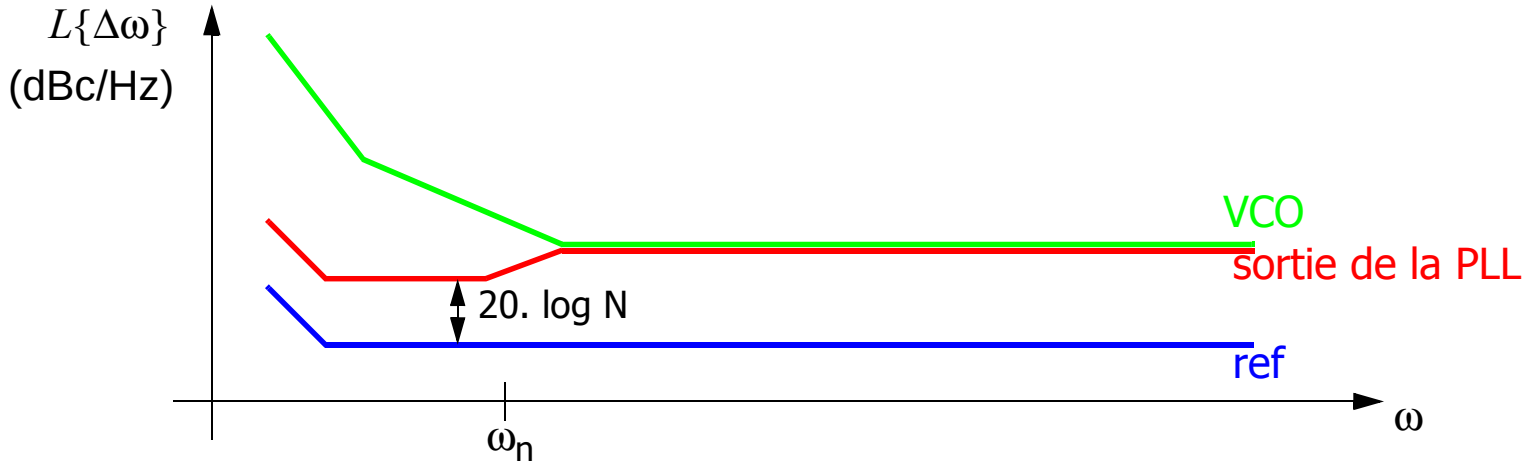
le bruit de phase du VCO
se retrouve en sortie
en dehors de la bande passante
de la PLL

bruit en sortie dû au filtre:

$$\left(\frac{2\pi \cdot K_{VCO}}{p} \times \frac{1}{1 + G_{loop}}\right) \cdot \phi_{n\,f}$$



Bruit de phase total en sortie de la PLL:



Dans la bande passante, le bruit de phase en sortie est dominé par celui de la référence, multiplié par N.

Hors bande passante, on retrouve le bruit de phase du VCO.

CONCLUSION

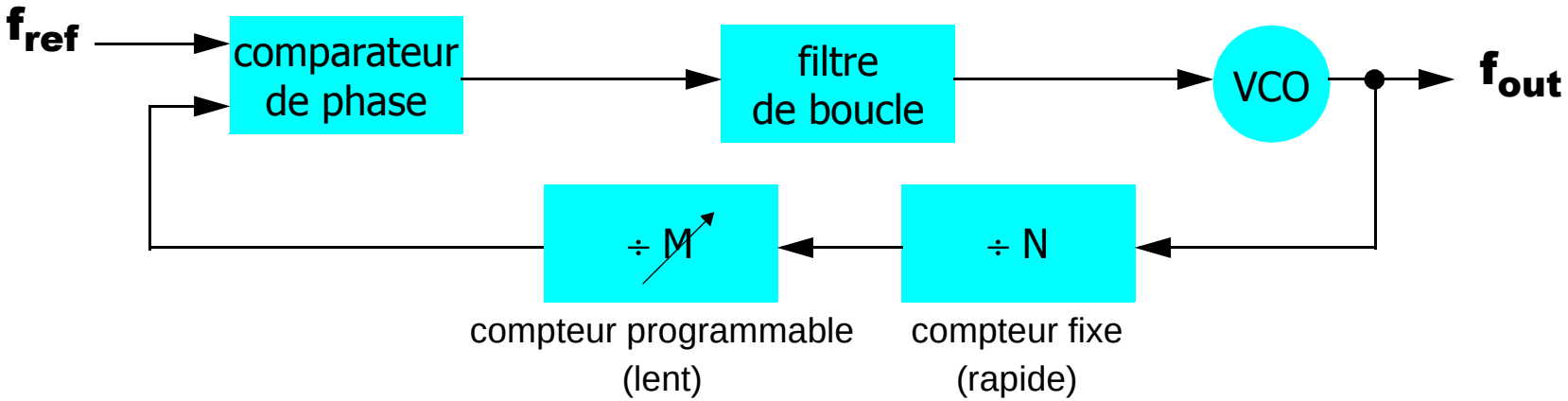
La PLL est utilisée comme synthétiseur de fréquence pour 2 raisons:

- f_{out} peut être modifiée (en modifiant N)
- un oscillateur de très bonne qualité (quartz) pilote un oscillateur de qualité moindre (VCO)
  $\Rightarrow$ le bruit de phase de ce dernier est amélioré

5 - ARCHITECTURES

5-1 - Division entière (Integer-N PLL)

5-1-1 - Prédiviseur fixe



$$f_{out} = N \times M \times f_{ref}$$

incrément de fréquence minimal: $f_{step} = N \times f_{ref}$

Spécification de départ dans le dimensionnement d'une PLL: f_{step} (exemple: 200 kHz)

Après avoir fixé N, on détermine $f_{ref} = \frac{f_{step}}{N}$ (faible)

fréquence de coupure de la PLL $f_c < f_{ref}$ (ordre de grandeur: $f_{ref}/10$)

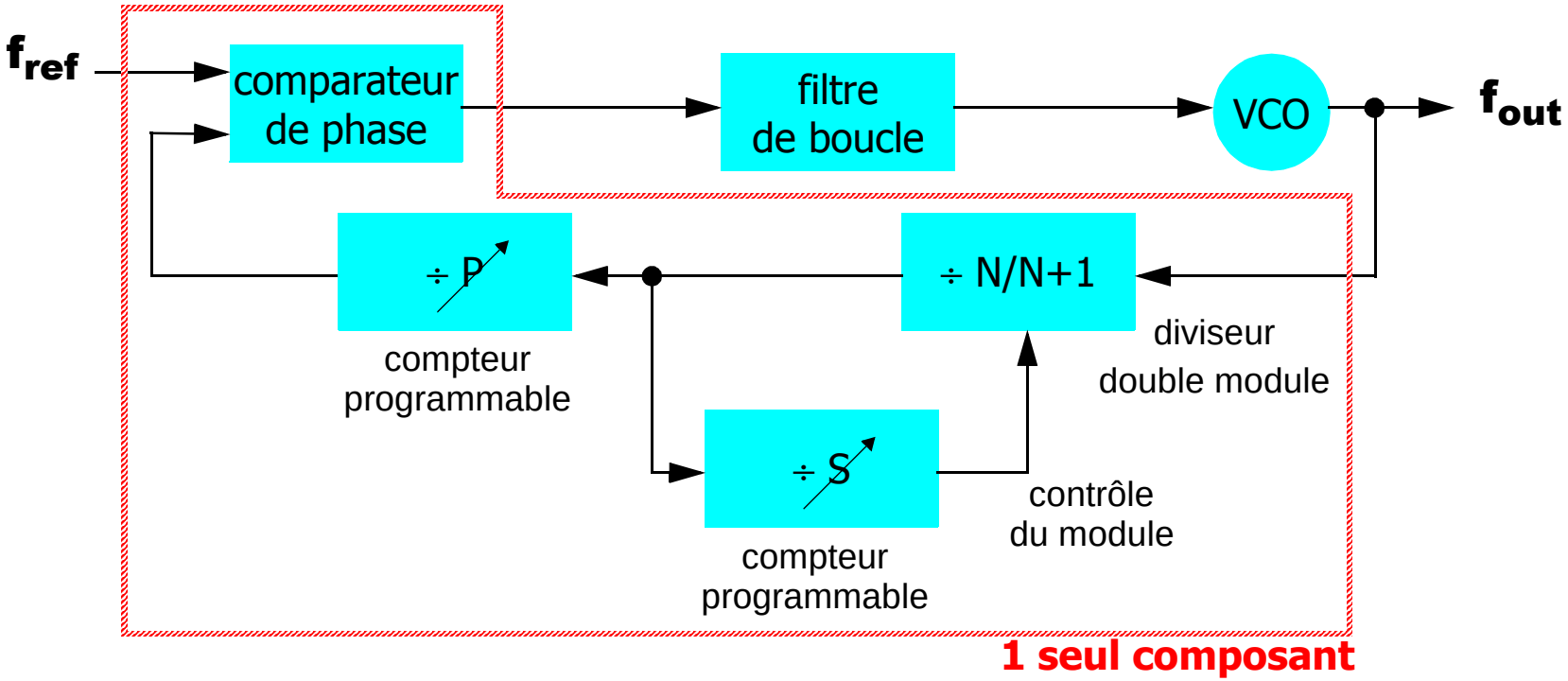
$\Rightarrow$ f_c faible

faible bande passante

$\Rightarrow$ peu d'amélioration du bruit de phase du VCO

$\Rightarrow$ lent lors des changements de fréquence

5-1-2 - Prédiviseur double module



$$f_{out} = (N \cdot P + S) \times f_{ref}$$

incrément de fréquence minimal: $f_{step} = f_{ref}$

Par rapport à la solution précédente, f_{ref} peut être N fois plus grand

$\Rightarrow$ bande passante de boucle peut être N fois plus grande

$\Rightarrow$ solution + intéressante (**la plus courante**)

f_{ref} augmente

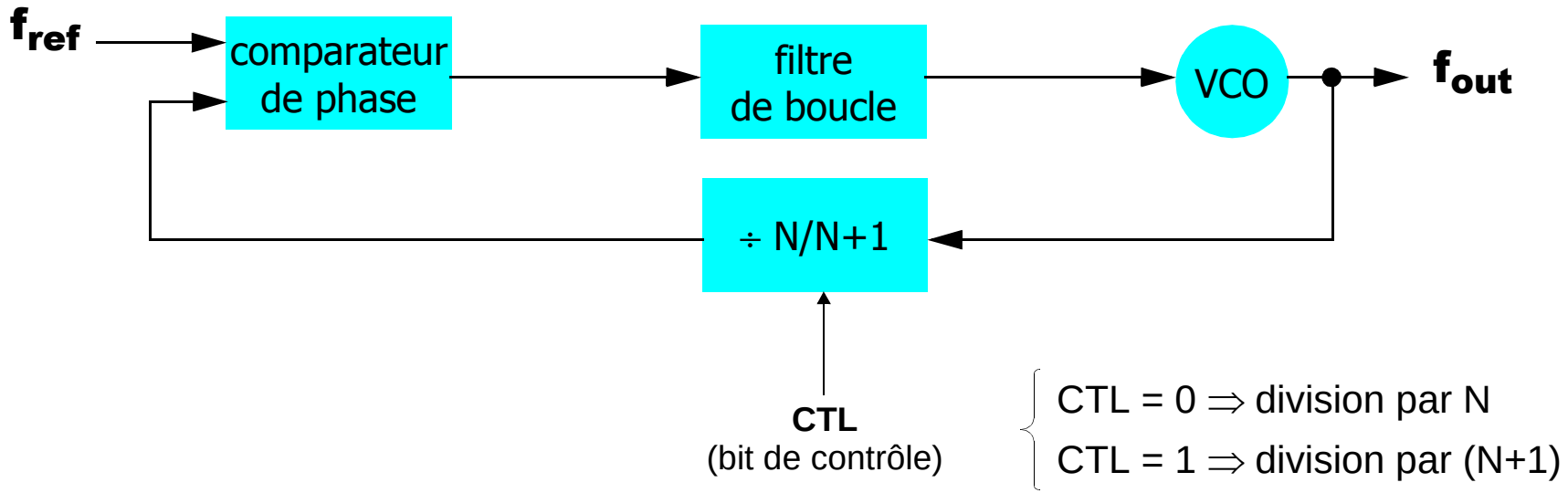
$\Rightarrow$ bande passante peut être augmentée

$\Rightarrow$ PLL plus rapide + meilleure correction du bruit de phase

solution idéale: $f_{ref} > f_{step}$

$\Rightarrow$ PLL fractionnelle

5-2 - Division fractionnelle (Fractional-N PLL)



pendant n périodes de f_{ref}: $f_{out} = N \times f_{ref}$

pendant m périodes de f_{ref}: $f_{out} = (N+1) \times f_{ref}$

en moyenne: $$f_{out} = \frac{(n \times N \times f_{ref}) + (m \times (N+1) \times f_{ref})}{n+m} = [N \times f_{ref}] + \left[\underbrace{\left(\frac{m}{n+m}\right)}_{\overline{CTL}} \times f_{ref}\right]$$

$N \times f_{ref} \leq f_{out} \leq (N+1) \times f_{ref}$

f_{ref}: **plage de variation** de fréquence et non plus **incrément** de fréquence

$$f_{out} = N \times f_{ref} + \overline{CTL} \times f_{ref} = \underbrace{(N + \overline{CTL})}_{\text{non entier}} \times f_{ref}$$

$$(0 \leq \overline{CTL} \leq 1)$$

incrément sur f_{out} = incrément sur $\overline{CTL}$ x f_{ref}

PLL fractionnelle: permet de choisir f_{ref} plus élevée